Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de **escolha múltipla**, escreva, na folha de respostas,

- o **número** do item;
- a **letra identificativa** da alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos e que impliquem a produção de um texto, o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa representa cerca de 10% da cotação.

As cotações dos itens encontram-se na página 11.

A prova inclui um Formulário na página 4.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \; k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1 \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_n \mathrm{p}_n$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2 \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_n - \mu)^2 \mathrm{p}_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approxeq 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approxeq 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approxeq 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Quantos números ímpares, de quatro algarismos diferentes, se pode formar com os algarismos $1,\ 3,\ 5$ e 8?

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 18 **(D)** 24

2. O $14.^{\text{o}}$ elemento de uma linha do Triângulo de Pascal é igual ao $15.^{\text{o}}$ elemento dessa mesma linha.

Quantos elementos tem essa linha?

(A) 14 **(B)** 15 **(C)** 28 **(D)** 30

3. Em cada semana, a chave do Totoloto é formada por seis números inteiros distintos, escolhidos aleatoriamente entre 1 e 49.

Qual é a probabilidade de, na próxima semana, a chave do totoloto incluir os números $1,\ 2$ e 3?

(A) $\dfrac{{}^{46}C_3}{{}^{46}C_6}$ **(B)** $\dfrac{{}^{46}C_3}{{}^{49}C_6}$ **(C)** $\dfrac{{}^{46}C_6}{{}^{49}C_6}$ **(D)** $\dfrac{{}^{49}C_3}{{}^{49}C_6}$

4. Para todo o $x \in \mathbb{R}$, qual das seguintes expressões é equivalente a $x \,.\ln\left(e^{e}\right)$?

(A) ex **(B)** e^{x} **(C)** e^{ex} **(D)** $x+e$

5. Na figura 1, está representada parte do gráfico de uma função f e a recta r de equação $y = x$.

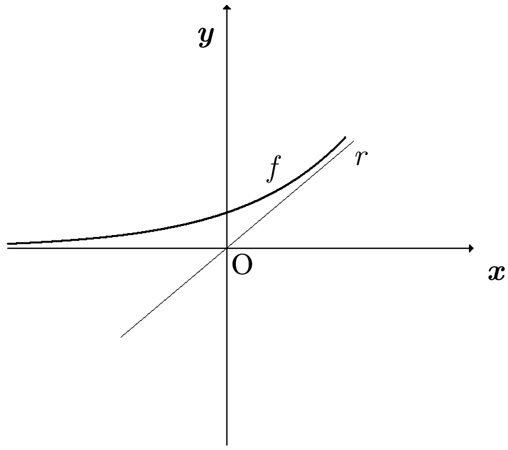
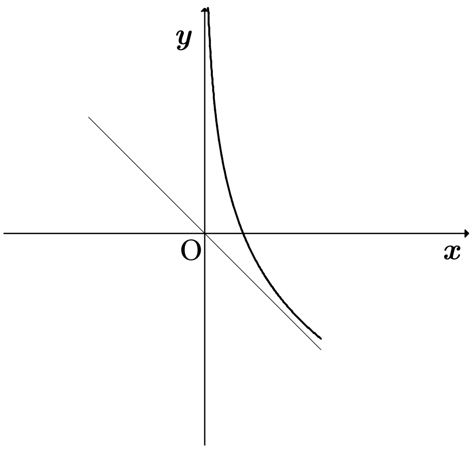


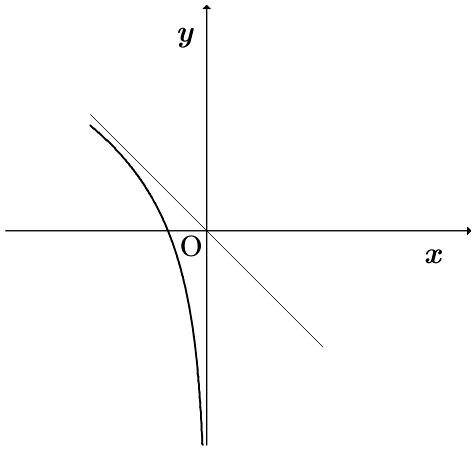
Fig. 1

Qual das figuras seguintes pode ser parte do gráfico da função f^{-1}, função inversa de f?

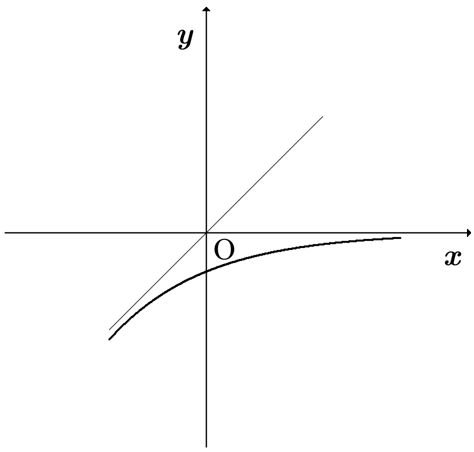
(A)



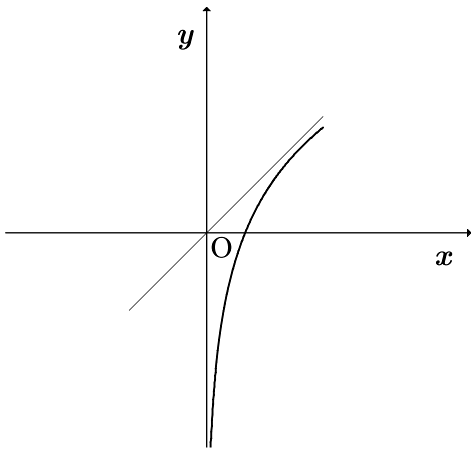
(B)



(C)



(D)



6. Seja a função f, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right]$, definida por $f(x) = \cos(x)$.

Qual é o contradomínio de f ?

(A) $[-1,0]$ **(B)** $[0,\ 1]$ **(C)** $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ **(D)** $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

7. Qual das seguintes condições, na variável complexa z, define, no plano complexo, uma circunferência?

(A) $|z+4| = 5$ **(B)** $|z| = |z+2i|$ **(C)** $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ **(D)** $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 2$

8. Na figura 2 está representado, no plano complexo, o polígono $[EFGHI]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 2. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 5 de um certo número complexo; um dos vértices pertence ao eixo real.

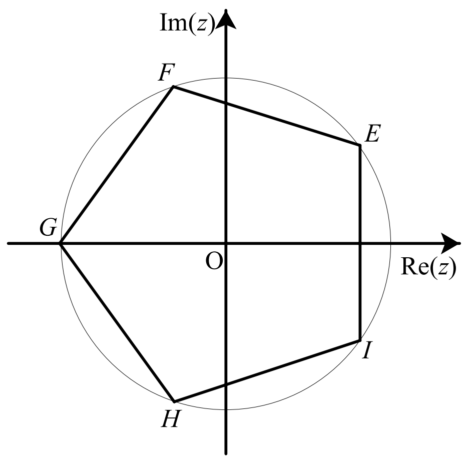


Fig. 2

Qual é o vértice do polígono $[EFGHI]$ que é a imagem geométrica de $2\ \mathrm{cis}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$?

(A) E **(B)** F **(C)** H **(D)** I

GRUPO II

Na resposta a itens deste grupo, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam os números $z_1 = (1 - i) \cdot \left(1 + \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = 8 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. Determine, **sem recorrer à calculadora**, o número complexo $w = \frac{z_1}{z_2}$.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Considere o número complexo $z = \overline{z_2}$.

No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z e de z_2, respectivamente.

Determine a área do triângulo $[AOB]$, em que O é a origem do referencial.

2. Três rapazes, o João, o Rui e o Paulo, e três raparigas, a Ana, a Maria e a Francisca, decidem passar a tarde juntos.

2.1. De quantas maneiras se podem sentar os seis amigos, uns ao lado dos outros, num banco corrido com seis lugares, ficando um rapaz em cada uma das extremidades?

2.2. Depois de ouvirem algumas músicas, os seis jovens resolveram dançar aos pares.
Admita que, numa dança:

- cada rapaz dança com uma rapariga;
- todos os jovens dançam;
- todos os pares são escolhidos ao acaso.

A probabilidade de, nessa dança, a Ana dançar com o João é igual a $\frac{2}{3!}$.

Explique, numa pequena composição, o raciocínio que conduziu a esta expressão.

Nota: Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$.

Mostre que: $1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) + P\left(A \mid B\right) \times P\left(B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right)$

$(P$ designa probabilidade, $\overline{A}$ representa o acontecimento contrário de A e $P(A \mid B)$ é a probabilidade de A dado B.)

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

4.1. Determine, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2.

4.2. No intervalo $]0,\, 5]$, a recta de equação $y = 6$ intersecta o gráfico da função f nos pontos A e B.

Determine a distância de A a B, com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Apresente o gráfico, ou os gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta, assinalando os pontos A e B e indicando as suas coordenadas com aproximação às décimas.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln\,(x^2 + 1)$ $\quad$ $(\ln$ designa logaritmo de base e).

Estude, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e os valores dos extremos relativos, caso existam.

6. Seja a função f, de domínio $[0,\, \pi]$, definida por $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,(x) \cdot \cos\,(x) + 2$.

O gráfico da função f intersecta a recta $y = 1$ num só ponto.

Determine, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, as coordenadas desse ponto.

7. Aqueceu-se água num recipiente, durante um determinado tempo, num local onde a temperatura ambiente é constante e igual a 25º Celsius. Interrompeu-se o processo de aquecimento, e nesse instante, a água começou a arrefecer.

O arrefecimento da água segue a Lei do arrefecimento de Newton, de acordo com o modelo matemático: $T(t) = 25 + 48\, e^{-0{,}05\ t}$, em que $T(t)$ representa a temperatura da água em graus Celsius, t **minutos** após o início do arrefecimento.

Resolva, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

7.1. Determine $T(0)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t)$.

Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

7.2. Determine ao fim de quanto tempo, após o início do arrefecimento, a temperatura da água atinge os 36º Celsius.

Apresente o resultado em **minutos** e **segundos**, com estes arredondados às unidades.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use quatro casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)		**40 pontos**
GRUPO II			**160 pontos**
1.		30 pontos	
1.1.	15 pontos		
1.2.	15 pontos		
2.		30 pontos	
2.1.	15 pontos		
2.2.	15 pontos		
3.		15 pontos	
4.		30 pontos	
4.1.	15 pontos		
4.2.	15 pontos		
5.		15 pontos	
6.		15 pontos	
7.		25 pontos	
7.1.	10 pontos		
7.2.	15 pontos		
TOTAL			**200 pontos**